Regeln des natürlichen Schließens

Aussagenlogik

	Einführung	*Elimination*
$\wedge$	$\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ \wedge\mathrm{i}$	$\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ \wedge\mathrm{e}_1 \qquad \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge\mathrm{e}_2$
$\vee$	$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{i}_1 \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{i}_2$	$\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee\mathrm{e}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \rightarrow \psi}\ \rightarrow\mathrm{i}$	$\dfrac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \rightarrow\mathrm{e}, \mathrm{MP}$
$\neg$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ \neg\mathrm{i}$	$\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ \neg\mathrm{e}$
RAA, $\bot$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \mathrm{RAA}$	$\dfrac{\bot}{\varphi}\ \bot\mathrm{e}, \mathrm{EFQ}$

Einige abgeleitete Regeln der Aussagenlogik

$$\dfrac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ \neg\neg\mathrm{i} \qquad\qquad \dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ \neg\neg\mathrm{e}$$

$$\dfrac{\varphi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \mathrm{MT} \qquad\qquad \dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \mathrm{TND}$$

Prädikatenlogik

	Einführung	*Elimination*
$=$	$\dfrac{}{t = t}$ = i, ID	$\dfrac{t_1 = t_2 \quad \varphi[t_1/x]}{\varphi[t_2/x]}$ = e, SUB
$\forall$	$\dfrac{\boxed{\begin{array}{ll} x_0 & \\ & \vdots \\ & \varphi[x_0/x] \end{array}}}{\forall x \varphi}$ ∀x i	$\dfrac{\forall x \varphi}{\varphi[t/x]}$ ∀x e
$\exists$	$\dfrac{\varphi[t/x]}{\exists x \varphi}$ ∃x i	$\dfrac{\exists x \varphi \quad \boxed{\begin{array}{ll} x_0 & \varphi[x_0/x] \\ & \vdots \\ & \chi \end{array}}}{\chi}$ ∃x e

Bemerkung

Es sind nur gültige Substitutionen erlaubt: In allen Substitutionen $\varphi[t/x]$ muss t frei für x in der Formel φ sein, d.h. keine freie Variable y in t gelangt durch das Einsetzen von x in φ in den Bereich eines Quantors $\forall y$ oder $\exists y$.

Neu eingeführte Variablen x_0 dürfen nirgendwo außerhalb ihres Gültigkeitsbereichs erscheinen.