THÉORIE DES GROUPES. — *Invariants géométriques supérieurs d'un groupe discret.* Note de **Robert Bieri** et **Burkhardt Renz**, présentée par Jean-Pierre Serre.

On associe à un groupe discret G certains ensembles ouverts Σ^k de la sphère S^{m-1}, m étant le rang de l'abélianisation de G. Ces invariants géométriques généralisent celui de Bieri-Neumann-Strebel. Ils permettent de distinguer, parmi les sous-groupes normaux de G à quotient abélien, ceux qui admettent des résolutions libres de type fini en dimension $\leqq k$.

GROUP THEORY. — Higher geometric invariants for discrete groups.

We associate to a group G *certain open subsets* Σ^k *of the sphere* S^{m-1}, *where m is the rank of the Abelianisation of* G. *This generalizes the geometric invariant* Σ^1 *of Bieri-Neumann-Strebel.* Σ^k *captures, in particular, complete information as to which normal subgroups of* G *with Abelian factor group admit free resolutions which are finitely generated in dimensions* $\leqq k$.

1. Dans cette Note nous considérons un groupe G de type $(FP)_n$, n étant un entier $\geqq 1$. Autrement dit, G est un groupe discret ayant la propriété que le G-module **Z** admet une résolution :

$$\mathscr{F}: \quad \to F_n \xrightarrow{\partial} F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \twoheadrightarrow \mathbf{Z},$$

où F_i est un G-module libre de type fini pour tout $i \leqq n$.

Pour chaque $i \leqq n$, on choisit une base X_i du G-module F_i avec la propriété que $\partial x \neq 0$ pour tout $x \in X_i$. Relativement à ces bases on définit le *support* d'une chaîne $c \in F_i$; c'est un sous-ensemble fini de G, noté $\operatorname{supp}(c)$, et défini de la manière inductive suivante : c étant donné par l'expression unique $c = \Sigma n_y y$, avec $y \in GX_i$ et $n_y \in \mathbf{Z}$, on pose

$$\operatorname{supp}(c) = \{ g \in G \mid \text{il existe } y \in g X_0 \text{ avec } n_y \neq 0 \} \qquad \text{pour} \quad i = 0$$

et

$$\operatorname{supp}(c) = \bigcup \{ \operatorname{supp}(\partial y) \mid n_y \neq 0 \} \qquad \text{pour} \quad i > 0.$$

Considérons maintenant un homomorphisme non trivial $\chi : G \to \mathbf{R}$ de G dans le groupe additif des nombres réels. En utilisant la notion de support ci-dessus on définit des applications $\chi : F_i \to \mathbf{R} \cup \{ \infty \}$ en posant $\chi(0) = \infty$ et $\chi(c) = \min \chi(\operatorname{supp}(c))$ si $c \neq 0$. Ces applications satisfont aux relations :

$$\begin{cases} \chi(c+d) \geqq \min \{ \chi(c), \chi(d) \} \\ \chi(\partial c) \geqq \chi(c) \qquad\qquad c, d \in F_i, \quad g \in G. \\ \chi(gc) = \chi(g) + \chi(c) \end{cases}$$

Il en résulte que la résolution $\mathscr{F}$ admet une filtration par les sous-complexes sur **Z** [et même sur **Z** $(\ker \chi)$] :

$$\mathscr{F}_{\chi, r} = \{ c \in \mathscr{C} \mid \chi(c) \geqq -r \}, \qquad r \in \mathbf{R}.$$

DÉFINITION. — On dit que le sous-complexe $\mathscr{F}_\chi = \mathscr{F}_{\chi, 0}$ est *essentiellement k-exact* pour un nombre $0 \leqq k \leqq n$, s'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que l'homomorphisme $\tilde{H}_i(\mathscr{F}_\chi) \to \tilde{H}_i(\mathscr{F}_{\chi, r})$ induit par l'inclusion soit nul pour tout $i \leqq k$ ($\tilde{H}$ désigne l'homologie *réduite*).

THÉORÈME 1. — *La validité de l'énoncé « $\mathscr{F}_\chi$ est essentiellement k-exact » ne dépend ni du choix des bases $X_i \subseteq F_i$ ni du choix de la résolution $\mathscr{F}$.*

La démonstration utilise des modifications algébriques de la résolution $\mathscr{F}$ qui imitent les expansions et contractions d'un CW-complexe au sens de l'homotopie simple de J. H. C. Whitehead.

2. Soit m le rang (sur $\mathbf{Z}$) de l'abélianisé G/G' de G. Alors l'ensemble $S(G)$ des homomorphismes non triviaux $\chi: G \to \mathbf{R}$, modulo multiplication par les nombres réels positifs, s'identifie à la sphère S^{m-1}. Le théorème 1 permet maintenant d'associer à G le sous-ensemble Σ^k de la sphère $S(G)$ *consistant en les points* $[\chi] \in S(G)$ *représentés par un homomorphisme* $\chi: G \to \mathbf{R}$ *pour lequel* $\mathscr{F}_\chi$ *est essentiellement* $(k-1)$*-exact.*

On peut démontrer que Σ^1 n'est rien d'autre que l'invariant géométrique Σ associé à G par Bieri-Neumann-Strebel [3]. Par définition, c'est l'ensemble des points $[\chi] \in S(G)$ ayant la propriété suivante : il existe un sous-monoïde de type fini $M \subseteq G$, avec $\chi(M) \geqq 0$, tel que le groupe G' des commutateurs de G soit de type fini comme M-groupe. Rappelons que Σ a aussi des interprétations dans la théorie des actions sur un arbre [5], dans la théorie des valuations sur un corps [1], [2], et dans la théorie des 1-formes « complètes » au sens de [6] sur les variétés différentielles (cela nous a été signalé par G. Levitt).

3. En généralisant les résultats correspondants de [3] on obtient :

THÉORÈME 2. — Σ^k *est un sous-ensemble ouvert de* $S(G)$.

THÉORÈME 3. — *Soit* G *un groupe de type* $(FP)_n$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes pour un sous-groupe normal* N *de* G *à quotient abélien et un nombre naturel* $k \leqq n$:

(*a*) N *est de type* $(FP)_k$;

(*b*) Σ^k *contient la sous-sphère* $S(G, N) = \{[\chi] \mid \chi(N) = 0\}$.

4. L'ensemble $E(j)$ des sous-groupes normaux N de G à quotient abélien libre de rang j est muni de la topologie induite par la topologie de la variété grassmannienne des sous-espaces $N/G' \otimes \mathbf{R}$ de codimension j dans $G/G' \otimes \mathbf{R} = \mathbf{R}^m$.

COROLLAIRE. — *Le sous-ensemble de* $E(j)$ *formé des groupes de type* $(FP)_k$ *est une partie ouverte de* $E(j)$.

Démonstration. — Si ce sous-ensemble est non-vide, il y a une suite exacte $1 \to N \to G \to \mathbf{Z}^j \to 1$ telle que N est de type $(FP)_k$. Puisque $\mathbf{Z}^j$ est de type $(FP)_\infty$ il en découle que G est de type $(FP)_k$. Comme $S(G, N)$ est compacte et Σ^k est ouvert, cela entraîne que, si $S(G, N)$ est contenu dans Σ^k, alors il en est de même pour $S(G, N_1)$ lorsque N_1 est un sous-groupe normal avec $G/N_1 \cong \mathbf{Z}^j$ suffisamment proche de N.

4. *Remarques.* — 1° La définition de Σ^k utilise la filtration de G par les sous-ensembles $\{g \in G \mid \chi(g) \geqq -r\}$, $r \in \mathbf{R}$, pour obtenir la filtration $\{\mathscr{F}_{\chi, r}\}$ de la résolution $\mathscr{F}$. Si N est un sous-groupe normal de G avec $G/N \cong \mathbf{Z}^j$, on peut plonger G/N dans l'espace $\mathbf{R}^n$ et utiliser la filtration de G par les boules $\{g \in G \mid \|gN\| \leqq r\}$, $0 < r \in \mathbf{R}$. On obtient ainsi une filtration de $\mathscr{F}$ par des sous-complexes

$$\mathscr{F}_r = \{c \in \mathscr{F} \mid \|\operatorname{supp}(c) N\| \leqq r\}, \qquad 0 < r \in \mathbf{R},$$

qui sont de type fini sur $\mathbf{Z}N$. Si $\chi(N) = 0$ on peut interpréter la filtration $\mathscr{F}_{\chi, r}$ comme la filtration $\mathscr{F}_r$ « localisée au point $[\chi]$ ».

Selon un critère de K. S. Brown ([4], Theorem 2.2) N est de type $(FP)_k$ si et seulement si, pour chaque nombre réel $r > 0$, il existe un nombre réel $s \geqq r$ tel que l'homomorphisme $\tilde{H}_i(\mathscr{F}_r) \to \tilde{H}_i(\mathscr{F}_s)$ induit par l'inclusion soit nul pour tout $i < k$. La condition $[\chi] \in \Sigma^k$ exprime donc une espèce de « propriété $(FP)_k$ locale » pour $N \subseteq \ker \chi$. Et l'énoncé du théorème 3 permet donc de passer du local au global.

2° Dans le cas où N est un sous-groupe normal de G avec $G/N \cong \mathbf{Z}$ [1], le théorème 3 a une démonstration simple utilisant le critère de Brown. En effet, dans ce cas on a $\mathscr{F}_r = \mathscr{F}_{-\chi, r} \cap \mathscr{F}_{-\chi, r}$, l'homomorphisme $\chi: G \to \mathbf{R}$ étant donné par $G \twoheadrightarrow G/N \cong \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$.

De plus, puisque $\mathscr{F}$ est de type fini en dimension $\leqq n$, l'ensemble $\mathscr{F}_{\chi, r} \cup \mathscr{F}_{-\chi, r}$ contient F_i pour tout $i \leqq n$ lorsque r est suffisamment grand. Vu la suite exacte de Mayer-Vietoris on a donc des isomorphismes

$$\tilde{H}_i(\mathscr{F}_r) \cong \tilde{H}_i(\mathscr{F}_{\chi, r}) \oplus \tilde{H}_i(\mathscr{F}_{-\chi, r}),$$

pour $r \gg 0$ et $0 \leqq i < n$. Il en découle que $\mathscr{F}_r$ satisfait au critère de Brown ([4], Theorem 2.2) si et seulement si $\mathscr{F}_{\chi, r}$ et $\mathscr{F}_{-\chi, r}$ sont k-exacts, d'où le théorème 3 dans ce cas. La démonstration du cas général est plus difficile. Elle ne s'appuie pas sur le critère de Brown mais utilise une définition « par équations » de Σ^k dans l'esprit de la proposition 2.1 de [3].

3° Il est utile de modifier la définition homologique de Σ^k donnée ci-dessus en introduisant une *version homotopique* de ces invariants. Cela sera l'objet d'une publication ultérieure.

([1]) Ross Geoghegan a obtenu indépendamment un résultat qui correspond à ce cas.

Reçue le 7 juillet 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. Bieri et R. Strebel, A geometric invariant for modules over an Abelian group, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelles Journal*), 322, 1981, p. 170-189.

[2] R. Bieri et J. R. J. Groves, The geometry of the set of characters induced by valuations, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelles Journal*), 347, 1984, p. 168-195.

[3] R. Bieri, W. D. Neumann et R. Strebel, *A geometric invariant for discrete groups* (à paraître).

[4] K. S. Brown, Finiteness properties of groups, *Journal of pure and appl. Algebra* (à paraître).

[5] K. S. Brown, *Trees*, HNN-*extensions, and the Bieri-Neumann-Strebel invariant*, Preprint, 1986.

[6] G. Levitt, Geometry and ergodicity of closed 1-forms, *Proc. V. Escola Geom. Diff. São Paulo*, 1984, p. 109-118.

Mathematisches Seminar,
Johann Wolfgang Goethe-Universität, D-6000 Frankfurt am Main, Allemagne.